

FUNCIÓN HOMOGRAFICA: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA CON EL APOORTE DEL SOFTWARE GEOGEBRA

Rodolfo Murúa María Paula Trillini
rmurua@ungs.edu.ar ptrillini@gmail.com
Universidad Nacional de General Sarmiento. Argentina

Tema: Uso de tecnología.

Modalidad: Comunicación breve.

Nivel educativo: Medio (11 a 17 años).

Palabras clave: GeoGebra - Propuesta didáctica - Función homográfica - Validación

Resumen

En el año 2014 se conformó un equipo de trabajo colaborativo entre docentes-investigadores de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS) de Buenos Aires, Argentina y una profesora de una escuela de la zona de influencia de la Universidad, María Mora. Se diseñó e implementó una propuesta didáctica en torno al contenido función homográfica. Fruto de esa experiencia los docentes-investigadores escribieron un libro llamado [FUNCIÓN HOMOGRAFICA: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA CON EL APOORTE DEL SOFTWARE GEOGEBRA](#). Los autores buscan indagar en nuevas formas de enseñanza de la función homográfica y reflexionar en el uso de GeoGebra. Con este propósito se presentan una serie de problemas acompañados de sugerencias didácticas para la gestión en el aula. Para las actividades que incorporan GeoGebra se propone un trabajo que potencia los momentos de exploración, formulación de conjeturas y la búsqueda de argumentos para validarlas, favoreciendo un verdadero trabajo matemático en el aula.

En esta oportunidad se propone relatar las ideas principales que organizan la secuenciación de los problemas y las decisiones didácticas que se fueron tomando en el desarrollo de este libro.

Introducción

Este escrito intenta transmitir el proceso llevado a cabo por los autores de libro “[Función homográfica: una propuesta didáctica con la mediación del software GeoGebra](#)”. Allí se presenta una propuesta didáctica que consta de una secuenciación de problemas, el análisis didáctico y algunas sugerencias para la gestión. La secuencia consta de dos partes: una específica de la *función homográfica* donde se centra en trabajar características de este tipo de funciones y una segunda parte donde se analiza el caso más general de *cociente de funciones lineales*. En el libro se pueden identificar algunos objetivos que orientan el rumbo dentro del esquema general:

- Estudio de cocientes de funciones lineales que determinan una función homográfica:
 - problematización de los gráficos de hipérbolas y la definición de asíntotas;
 - exploración con GeoGebra entre parámetros y propiedades de las asíntotas de horizontales;
 - prácticas mixtas con y sin el programa para realizar un análisis completo de las funciones homográficas.
- Estudio de cocientes de funciones lineales que no determinan una función homográfica:
 - explorar diversas funciones no homográficas que resulta de realizar el cociente de dos funciones lineales;
 - identificar bajo qué condiciones el cociente de dos funciones lineales determina una función homográfica.

Un posible vínculo entre la Universidad y la Escuela Secundaria

En una primera etapa dictamos un curso de formación continua destinado a profesores de escuela secundaria de la zona de influencia de la UNGS. Los contenidos del mismo fueron “Geometría y Funciones con la incorporación del programa GeoGebra” (de aquí en adelante llamaremos GG al programa). Al finalizar los encuentros les sugerimos a los docentes pensar conjuntamente una propuesta de trabajo para trabajar asuntos discutidos en el curso. La propuesta consistía en planificar e implementar en sus escuelas algún tema de su interés incorporando el programa GG. La profesora María Mora accedió y junto a ella analizamos su planificación anual para elegir el contenido y el momento de la implementación. El tema elegido por la profesora fue “Función Racional”, aunque por cuestiones de tiempo elaboramos luego una secuencia para trabajar “Función Homográfica”. Gracias a la experiencia de aula y al material recopilado decidimos seguir reflexionando sobre lo sucedido y el entusiasmo nos impulsó para profundizar el estudio didáctico de este contenido escolar. Fruto de este recorrido escribimos el libro

mencionado en la introducción como una manera de plasmar nuestra experiencia.

Acerca de la propuesta didáctica

Durante el proceso de planificación, de implementación y de análisis de la experiencia de aula fuimos tomando algunas decisiones didácticas que se plasman en la propuesta del libro, algunas de ellas son:

- postergar la aparición del software hasta la actividad 6 para que los alumnos tengan la posibilidad de hacer un estudio analítico de las funciones presentadas a partir de los conocimientos previos. Creemos que esto le atribuye sentido a las gráficas de las funciones homográficas;
- proponer actividades donde se problematice la forma del gráfico de una hipérbola y los estudiantes tengan la posibilidad de:
 - elegir o descartar entre posibles gráficos;
 - ensayar y esbozar gráficos de funciones homográficas;
- habilitar un uso exploratorio del GG articulado con prácticas de lápiz y papel involucrando la manipulación de fórmulas con el objetivo de validar y/o refutar conjeturas;
- disponer de tratamientos aritméticos que permitan reflexionar sobre los aspectos generales de los cálculos permitiendo ensayar validaciones matemáticas;
- utilizar una noción de asíntota horizontal y vertical que abarca aspectos generales del objeto asíntota pero también aspectos particulares que se dan en el contexto de funciones homográficas, como por ejemplo: existe una única asíntota vertical y una única asíntota horizontal que se pueden vincular con el dominio y la imagen respectivamente de las funciones, y más aún, estas asíntotas no son “cortadas” por la gráfica.

Todas estas decisiones, algunas ligadas al trabajo con el GeoGebra y otras al “lápiz y papel” tienen detrás una concepción acerca de qué es hacer matemática para nosotros. Buscamos generar condiciones para que los alumnos usen “críticamente” el software,

puedan generar conjeturas y luego descartarlas o validarlas. Para que esta propuesta sea posible planteamos tareas que involucren, entre otras cuestiones, el trabajo con: diferentes registros de representación, definiciones y parámetros. Apostando a que esta diversidad de tareas contribuye a la construcción de una noción más acabada de función homográfica.

Propiedad de la asíntota horizontal

Uno de los objetivos que nos propusimos con esta secuencia es arribar, **a partir del trabajo con los estudiantes**, a la propiedad que permite hallar la asíntota horizontal de una **función homográfica** $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Esta propiedad afirma que la ecuación $y = \frac{a}{c}$ corresponde con la asíntota horizontal de h , es decir que hay que dividir las pendientes de las funciones lineales en cuestión. Para ello se planificaron actividades con GG que involucren el uso de parámetros. A modo de ejemplo presentamos la siguiente actividad (el problema completo se puede ver en el anexo):

Actividad 6. Para trabajar con GeoGebra

Ingresa en la “Barra de entrada”:

- $f(x) = 4x - 8$
- $g(x) = ax + 6$, donde “ a ” es un parámetro previamente ingresado.
- $h(x) = f(x)/g(x)$

Para cada ítem, en caso de ser posible hallá una función h que cumpla lo pedido, y anotá la fórmula en tu carpeta. Si no es posible explicá por qué.

iv) Ingresa en la “Barra de entrada” la recta $y = 1$. Modificando el parámetro “ a ” encontrá, si es posible, una función h que tenga como asíntota horizontal a la recta ingresada.

Para este ítem anticipamos que los estudiantes podrán ir ajustando el parámetro a hasta que crean que la asíntota horizontal es 1. Puede ocurrir que haya alumnos que tomen $a = 3.9$. Para estos casos se puede preguntar si es cierto que evaluando en valores cada vez más “grandes” la función se aproxima a 1. A continuación mostramos una pantalla en la que se elige $a = 3,9$ y se evalúa h en valores cada vez más grandes en valor absoluto.

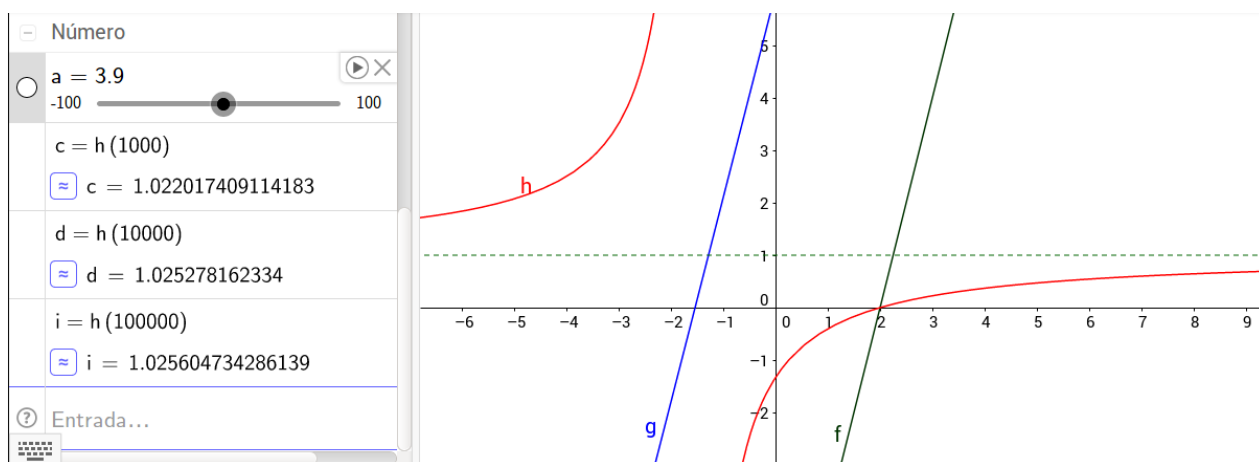


Imagen 1: captura de pantalla al elegir $a=3.9$ e ir evaluando h en valores cada vez más grandes.

Aquí los alumnos podrían llegar a la conjetura de que para **ese** valor de a las imágenes de valores cada vez más grandes en valor absoluto **no** se van a aproximar a uno. Lo interesante de esta conjetura es que se puede validar desde distintas perspectivas, veamos tres de ellas:

- Utilizando el software se puede apreciar que $h(100) > 1$, con lo cual se estaría cortando la asíntota horizontal de una función homográfica.
- Se puede recurrir al marco algebraico y resolver la ecuación $1 = \frac{4x-8}{3.9x+6}$.
- Se puede recurrir a propiedades trabajadas en los problemas anteriores. Si a vale 3.9, las rectas al tener distinta pendiente, se cortan en algún punto. Por lo tanto, h evaluada en la coordenada x de ese punto tiene que dar 1. Es decir, 1 no puede ser asíntota horizontal.

Cabe destacar dos cuestiones didácticas que tuvimos en cuenta a la hora de formular esta actividad, por un lado comenzamos con una asíntota horizontal $y = 1$ porque en la actividad anterior los estudiantes habían trabajado con dos rectas paralelas y esto

habilitaba a una estrategia más de resolución. Por el otro, decidimos poner un sólo parámetro en la función h para que los estudiantes puedan controlar mejor la exploración, teniendo en cuenta que era la primera actividad con parámetros.

En relación a esto último, en la siguiente actividad (ver anexo: actividad 7) se trabaja con una función homográfica $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, donde la función f es la misma del problema anterior y ahora la fórmula de g tiene **dos** parámetros, es decir, es $g(x) = ax + b$, donde a y b son números reales. Se pretende hallar valores de a y b para que la asíntota horizontal también sea $y = 1$ con el objetivo de estudiar que la ordenada al origen de g no influye a la hora de resolver el problema.

Finalmente, para arribar a la propiedad buscada se propone en la actividad 8 (ver anexo) una función $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, con $f(x) = 12x + c$ y $g(x) = ax + 5$ con la variante que ahora se pide que la asíntota horizontal sea $y = 2$ y luego $x = -3$. Aquí se pretende trabajar dos cuestiones: que la ordenada al origen de f tampoco tiene relación con la asíntota horizontal y que hay una relación entre las pendientes de f y de g que determinan dicha asíntota. Si los alumnos no llegan a la conjetura deseada, en el libro proponemos distintas intervenciones docentes para “poner el ojo” en la relación “*pendiente de f = (pendiente de g). (asíntota horizontal)*”. Allí también proponemos dos validaciones posibles. El docente deberá analizar si alguna de ellas es posible de trabajarla con sus alumnos.

Conclusiones finales

Además de mencionar los aspectos centrales del libro, en esta comunicación nos interesaba rescatar una alternativa de trabajo articulado entre la Universidad y la Escuela Secundaria. Creemos que este proyecto planteó un doble desafío: para los investigadores elaborar una propuesta que sea posible implementarla por la docente en su escuela secundaria y por otro lado para la profesora Mora trabajar con un enfoque diferente de función homográfica al habitual en sus prácticas. Para que esto sea posible fueron necesarias varias reuniones de trabajo entre los investigadores y la docente. Con

esta modalidad, buscamos “romper” la idea de capacitación para formar un equipo de trabajo colaborativo.

De esta manera, compartimos un modo de pensar la matemática, reflexionamos juntos sobre la enseñanza de función homográfica y tuvimos la oportunidad de trabajar de manera colaborativa con colegas. A raíz de esto, creemos que los alumnos también fueron enriquecidos en su modo de hacer matemática.

Referencias bibliográficas

Murúa, R. y Trillini, M.P. (2016). *Función homográfica: una propuesta didáctica con el aporte del software GeoGebra*. Buenos Aires: Editorial UNGS, Colección Educación.

Disponible en

http://www.ungs.edu.ar/ms_publicaciones/index.php/libro/funcion-homografica/

Novembre, A.; Coll P. y Nicodemo, M. (2015). *Matemática y TIC: orientaciones para la enseñanza*, María Paula Trillini (colaboradora). Buenos Aires: Anses. Disponible en: <http://escuelasdeinnovacion.conectarigualdad.gob.ar/mod/page/view.php?id=875>.

Sessa, C.; Fioriti, G.; Borsani, V.; Murúa, R. y otros (2015). *Introducción al trabajo con polinomios y funciones polinómicas. Incorporación del programa GeoGebra al trabajo matemático en el aula*. Gonnet: UNIPE-Editorial Universitaria. Disponible en: <http://editorial.unipe.edu.ar/herramientas/introduccion-al-trabajo-con-polinomios-y-funciones-polinomicas/>

Anexo

Actividad 6. Para trabajar con GeoGebra

Ingresa en la “Barra de entrada”:

- $f(x) = 4x - 8$

- $g(x) = ax + 6$, donde “ a ” es un parámetro previamente ingresado.
- $h(x) = f(x)/g(x)$

Para cada ítem, en caso de ser posible hallá una función h que cumpla lo pedido, y anotá la fórmula en tu carpeta. Si no es posible explicá por qué.

i) Ingresá en la “*Barra de entrada*” el punto “ $P = (1,2.5)$ ”.

Modificando el parámetro “ a ” encontrá, si es posible, una función h cuyo gráfico pase por dicho punto.

ii) Ingresá en la “*Barra de entrada*” el punto “ $P = (1,0)$ ”. Modificando el parámetro “ a ” encontrá, si es posible, una función h cuyo gráfico pase por dicho punto.

iii) Ingresá en la “*Barra de entrada*” la recta $x = -3$. Modificando el parámetro “ a ” encontrá, si es posible, una función h que tenga como asíntota vertical a la recta ingresada.

iv) Ingresá en la “*Barra de entrada*” la recta $y = 1$. Modificando el parámetro “ a ” encontrá, si es posible, una función h que tenga como asíntota horizontal a la recta ingresada.

v) Modificando el parámetro “ a ” encontrá, si es posible, una función h que tenga a la recta $y = 1$ como asíntota horizontal y a la recta $x = -3$ como asíntota vertical.

Actividad 7. Para trabajar con GeoGebra.

Ingresá en la “*Barra de entrada*”:

- $f(x) = 4x - 8$
- $g(x) = ax + b$, donde “ a ” y “ b ” son parámetros previamente ingresados.
- $h(x) = f(x)/g(x)$

Para cada ítem, en caso de ser posible hallá una función h que cumpla lo pedido, y anotá la fórmula en tu carpeta. Si no es posible explica por qué.

- i) Ingresá en la “Barra de entrada” la recta $x = -3$. Modificando los parámetros “ a ” y/o “ b ” encontrá, si es posible, dos funciones h que tengan como asíntota vertical a la recta ingresada.
- ii) Ingresá en la “Barra de entrada” la recta $y = 1$. Modificando los parámetros “ a ” y/o “ b ” encontrá, si es posible, dos funciones h que tengan como asíntota horizontal a la recta ingresada.
- iii) Modificando los parámetros “ a ” y/o “ b ” encontrá, si es posible, una función h que tenga a la recta $y = 1$ como asíntota horizontal y a la recta $x = -3$ como asíntota vertical.

Actividad 8. Para trabajar con GeoGebra.

Ingresá en “Barra de entrada”:

- $f(x) = 12x + c$, donde “ c ” es un parámetro previamente ingresado.
- $g(x) = ax + 5$, donde “ a ” es un parámetro previamente ingresado.
- $h(x) = f(x)/g(x)$

Para cada ítem, en caso de ser posible, hallá una función h que cumpla lo pedido y anotá la fórmula en tu carpeta. Si no es posible explica por qué.

- i) Ingresá en la “Barra de entrada” la recta $y = 2$. Modificando los parámetros “ a ” y “ c ” encontrá, si es posible, dos funciones h que tengan como asíntota horizontal a la recta ingresada.
- ii) Ingresá en la “Barra de entrada” la recta $y = -3$. Modificando los parámetros “ a ” y “ c ” encontrá, si es posible, dos funciones h que tengan como asíntota horizontal a la recta ingresada.